TEORIJA IGARA

Operaciona istraživanja

Teorija igara

- *Teorija igara* predstavlja matematičku teoriju i metodologiju koja se koristi za analizu i rešavanje konfliktnih i delimično konfliktnih situacija u kojima učesnici imaju suprotstavljene interese. Razmatranje situacija u kojima dva ili vise subjekata donose odluke u uslovima sukoba interesa nazvano je teorijom igara zato što tipične primere ovakvih situacija predstavljaju različite društvene igre, kao što su sportske utakmice, kartaške igre (poker, bridz, i sl.), šah, itd.

- Da bi korišćenjem odgovarajućeg matematičkog modela mogli analizirati konfliktnu situaciju, neophodno je izvršiti takvo uprošćavanje koje omogućava uključivanje u razmatranje samo najznačajnijih faktora koji utiču na mogući ishod konflikta.

- Osnovna karakteristika teorije igara sadržana je u činjenici da veličina rezultata koji će pojedini igrači ostvariti u igri ne zavisi samo od njihovog izbora mogućeg pravila ponašanja u igri, već i od izbora ostalih igrača. Svaki od igrača unapred poznaje moguće alternative koje mu stoje na raspolaganju u toku igre, koje nazivamo njegovim strategijama.

- Ukoliko svakom od igrača u igri stoji na raspolaganju konačan broj strategija, tada se radi o tzv. *konačnoj igri*. U suprotnom slučaju, kada broj strategija igrača nije ograničen, igra predstavlja *beskonačnu igru*.

Osnovni pojmovi

Ako samo jedan protivnik može uticati na ishod događaja, igra se svodi na takozvanu *igru jednog lica* . Na primer, ako igrač A ima niz alternativa (strategija) $a_1, a_2, \ldots a_m$, tj.

$$A = (a_1, a_2, \ldots a_m),$$

Sa ishodom (cenom) koji se može proceniti kao dobit koja će zavisiti od odbrane alternative,

$$C(a_1), C(a_2), \ldots, C(a_m)$$

Tada se za igrača A može tražiti optimalna alternativa a^* u skupu mogućih alternativa A, tako da bude ispunjen uslov

$$C(a^*) \geq C(a_i), \text{ za } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Igre sa dva igrača

Situacija postaje znatno složenija ako imamo dva igrača koji mogu da utiču na ishod igre.

Skup mogućih alternativa igrača A je

$$A=(a_1,a_2,\ldots a_m),$$

dok je skup mogućih alternativa za igrača B

$$B=(b_1,b_2,\ldots b_n),$$

Tada je ishod igre (dobit) funkcija dve promenjive,

$$C=C(a_i,b_j).$$

Igra odražava sukob interesa i oba protivnika žele da izaberu optimalne strategije s obzirom na cenu igre.

U slučaju kada odluke donosi samo jedno lice, a ishod igre se ne određuje samo izborom jedne alternative od strane donosioca odluke, tada na ishod igre utiče slučajna promenljiva θ, tako da je

$$C=C(a,\theta).$$

- **Pojam igre sa nultom sumom.** Igra se naziva „igra sa nultom sumom“ ako jedan od igrača dobija onoliko koliko drugi gubi, tj. Zbir dobiti u igri oba igrača je jednak nuli.
- Igre dva lica sa nultom sumom nazivaju se *antagonističkim igrama.* Normalna forma konačne antagonističke igre svodi se na neku matrricu A sa brojem redova jednakim broju strategija igrača 1 i sa brojem kolona jednakim broju strategija igrača 2. Dobit za igrača 1, ako odabere *i*-tu strategiju , a igrač 2 odabere *j*-tu strategiju, definisana je elementom a_{ij}, koji se nalazi u *i*-tom redu i *j*-toj koloni matrice A. Matrica A se naziva *matricom plaćanja.*
- Cilj teorije igara je da se egzaktnim matematičkim aparatom analizira konfliktna situacija i odredi razumno ponašanje igrača u toku konflikta, tj. da se odrede optimalne strategije za svakog od učesnika u igri.

- **Optimalna strategija.** Pod pojmom optimalne strategije podrazumeva se takva strategija koja pri višestrukom ponavljanju igre obezbeđuje tom igraču maksimalno mogući srednji dobitak, odnosno, minimalno mogući srednji gubitak.
- Pri izboru optimalne strategije polazi se od činjenice da je protivnik potpuno razuman i činiće sve da nas spreči u ostvarenju cilj. Polazeći od ovoga u teoriji igara se formulise sledeći princip:
- Igrač bira soje ponašanje tako da mu dobitak bude maksimalan uz , za njega, najnepovoljnije delovanje protivnika. Ovaj princip, koji diktira svakoj strani izbor svoje najopreznije strategije, računajući na, za sebe, najnepovoljnije ponašanje protivnika, naziva se principom minimaksa i predstavlja osnovni princip u teoriji igara.
- Strategije koje učesnici u igri biraju na osnovu ovog principa, nazivaju se minimaksnim strategijama.

Zadatak 1

Definicija igre.

Posmatramo takvu igru gde svaki igrač, nezavisno od drugog igrača, može da izabere alternative,kako je pokazano u sledećoj tabeli

Igrači	Alternative		
I	x_1	x_2	x_3
II	y_1	y_2	y_3

Dobir ili funkcija cene igre za igrača I, koja zavisi od izbora mogućih strategija, data je sledećim skupom podataka,

$$C=C(x_1,y_1)=4,\quad C=C(x_1,y_2)=-1,\quad C=C(x_1,y_3)=-4,$$
$$C=C(x_2,y_1)=3,\quad C=C(x_2,y_2)=2,\quad C=C(x_2,y_3)=3,$$
$$C=C(x_3,y_1)=-2,\quad C=C(x_3,y_2)=0,\quad C=C(x_3,y_3)=8,$$

Naći rešenje igre,tj. Odrediti:

a) optimalni strategijski par (xi,yj) za koji se još naziva i Borel-von Neumanov strategijski par;

b) naći vrenost matrične igre.

Napred definisanu igru možemo svesti na matričnu formu, kako je to prikazano u narednoj tabeli, gde redovi odgovaraju mogućim strategijama igrača I, a kolone mogućim strategijama igrača II.

		Strategija igrača II			Minimum Po redu
		y_1	y_2	y_3	
Strategija igrača I	x_1	4	-1	-4	-4
	x_2	3	2	3	2
	x_3	-2	0	8	-2
Maksimum po koloni		4	2	8	

Analizom matrice cene igre, igrač I utvrđuje da ako odabere strategiju x_1 minimalno što će da dobije je -4, za strategiju x_2, je 2, a ako odabere strategiju x_3 minimalna dobit je -2. Igrač I će nastojati da odabere takvu strategiju kojoj odgovara maksimum među utvrđenim minimalnim dobitima. U našem slučaju toje strategija x_2.Vrednost dobiti koja pdgovara strategiji x_2, naziva se **donjom vrednošću igre** i obeležava se sa α. Pri tome, imamo da je

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 2.$$

Analizom matrice cene igre, igrač II utvrđuje da ako odabere strategiju y_1 maksimalno što može da izgubi je 4, za strategiju y_2 je 2, a ako odabere strategiju y_3 maksimalno što može da izgubi je 8. Igrač II će nastojati da odabere takvu strategiju koja odgovara minimumu među utvrđenim maksimalnim gubicima po svakoj koloni. U našem slučaju to je strategija y_2. Ovako dobijemna vrednost se naziva **gornjom vrednošću igre** i obeležava se β. Prema tome, imamo da je

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 2.$$

Ako je gornja vrednost igre jednaka donjoj vrednosti igre za takvu matričnu igru se kaže da ima **sedlo,** a rešenje igre je u domenu **čistih strategija.** Drugim rečima, ako oba igrača pronađu bar po jednu strategiju, koja je prema predviđanjima najbolja u odnosu na sve straategije njegovog protivnika kaže se da igra za rešenje ima čiste strategije za optimalne. Ovo je moguće samo onda ako matrična igra ima sedlo. U tom slučaju vrednost igre je

$$v = \alpha = \beta.$$

U našem slučaju, matična igra ima sedlo i optimalne strategije su u domenu čistih strategija, to su:

I igrač-strategija x_2

II igrač-strategija y_2

a donja vrednost igre jednaka je gornjoj vrednosti igre, tj.

$$v = \alpha = \beta = 2.$$

Element a_{22} =2 naziva se sedlom matrične igre.

Zadatak 2

U jednoj epidemiji je otkriveno prisustvo tri vrste mikroba (M_1, M_2 i M_3). Na raspolaganju su dve vrste antibiotika (A_1 i A_2). Antibiotik A_1 ima verovatnoću uništavanja mikroba 0.3, 0.4, 0.5 respektivno. Sa druge strane, antibiotik A_2 uništava mikrobe sa verovatnoćom 0.2, 0.3 i 0.6 respektivno. Rešiti matrićnu igru.

Rešenje. Rešavanje zadatka je prikazano u matričnoj formi sledećom tabelom .

Matrica plaćanja		**Mikrobi**			**Minimalni prosečni dobici (*max min*)**
		M_1	M_2	M_3	
Antibiotici	A_1	**0.3**	0.4	0.5	0.3
	A_2	0.2	0.3	0.6	0.2
Maksimalni prosečni gubici (*min max*)		0.3	0.4	0.6	/

Igra ima sedlastu tačku u polju a_{11}.

Vrednost igre je

$$v = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = a_{11} = 0.3.$$

Rešavanje mešovitih matričnih igara

Kada matrica plaćanja nema sedlastu tačku, onda se optimalne strategije igrača i vrednosti matriče igre određuju na drugačiji način. U tom slučaju igrač A nema čistu strategiju koja bi mu obezbedila minimalni garantovani dobitak uz racionalno ponašanje drugog igrača. Analogno, igrač B nema jedinstvenu strategiju kojom osigurava gornju granicu svojih plaćanja. Zbog toga igrači uvode elemente slučajnosti kod izbora pojedinih strategija. Oni više ne biraju po jednu strategiju jednoznačno, već se odlučuju za različite strategije sa različitim verovatnoćama.

Igrač A ima na raspolaganju m alternativa (strategija) i svaku od njih odabira sa određenom verovatnoćom. Označavamo sa

$$p_1,\ p_2,\ ...,\ p_m$$

verovatnoće izbora pojedinih alternativa $a_1, a_2, ..., a_m$, redom. Ove verovatnoće zadovoljavaju sledeće uslove:

$$p_i \geq 0,\ \ i = 1, 2, ..., m\ \text{ i }\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Vektor $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ nazivamo *mešovitom strategijom igrača A*. Kod čiste strategije jedna od ovih verovatnoća jednaka je 1 a sve ostale su jednake 0. Kod mešovite strategije najmanje dve od verovatnoća moraju biti pozitivne.

Na sličan način posmatramo i igrača B. On ima na raspolaganju n alternativa (strategija) i za svaku se odlučuje sa određenom verovatnoćom. Verovatnoće za izbor njegovih strategija $b_1, b_2, \ldots, b_n$ označavamo sa:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

I ove verovatnoće moraju zadovoljiti uslove

$$q_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Vektor $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ izražava *mešovitu strategiju igrača B*.

Sada je potrebno da se odredi vrednost matrične igre. Kada oba igrača upotrebljavaju mešovite strategije P i Q, onda vrednost igre neće odgovarati samo vrednosti jednog elementa matrice plaćanja. Igrač A će dobiti iznos a_{ij} od igrača B samo ako on odabere i-tu alternativu, a igrač B j-tu alternativu. Verovatnoća da igrač A izabere i-tu alternativu jednaka je p_i, a verovatnoća da igrač B izabere j-tu alternativu jednaka je q_j. Prema verovatnoći proizvoda nezavisnih događaja, verovatnoća da igrač A dobije iznos a_{ij} jednaka je $p_i q_j$. Kada igrač A koristi strategiju $P = (p_1, \ldots, p_m)$ a igrač B strategiju $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ srednji dobitak igrača A (odnosno očekivani gubitak za igrača B) iznosi

$$\mathrm{E}(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j.$$

Vrednost mešovite igre

Igrač A će nastojati da, izborom svoje strategije, uveća ovu vrednost igre, a igrač B će želeti da je što više smanji. Zbog toga, oni će nastojati da izaberu svoje optimalne strategije. Rešenje igre je par optimalnih strategija. Označimo sa P^* optimalnu strategiju za igrača A i sa Q^* optimalnu strategiju za igrača B. Optimalne strategije poseduju sledeću osobinu: ako se jedan od igrača pridržava svoje optimalne strategije, tada drugom igraču ne odgovara da odstupa od svoje optimalne strategije. To znači da je ispunjen uslov

$$\mathrm{E}(P, Q^*) \le \mathrm{E}(P^*, Q^*) \le \mathrm{E}(P^*, Q)$$

za sve moguće vrednosti vektora P i Q. Tada vektori P^* i Q^* predstavljaju rešenje matrične igre i predstavljaju optimalne mešovite strategije. Optimalno rešenje koje predstavlja mešovite strategije P^* i Q^* naziva se još i ***strateško sedlo*** igre, a odgovarajuća srednja vrednost plaćanja predstavlja vrednost matrične igre v, tj.

$$v = \mathrm{E}(P^*, Q^*).$$

Dokazano je kako se rešavanje svake matrične igre može prevesti u rešavanje odgovarajućeg problema linearnog programiranja.

U opštem slučaju, rešiti matričnu igru znači odrediti:

a) vektor mešovite strategije za igrača I,

$$P=(p_1,p_2,\ldots,p_n), \text{ gde je}$$

$$p_1+p_2+\ldots+p_n=1;$$

b)vektor mešovite strategije za igrača II

$$Q=(q_1,q_2,\ldots,q_m) \text{ gde je}$$

$$q_1+q_2+\ldots q_m=1 \quad \text{i}$$

c)vrednost matrične igre koja je definisana sledećim izrazom

$$C(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,p_i q_j \text{ , gde su}$$

p_i-verovatnoća izbora i-te čiste strategije igrača I;

q_j-verovatnoća izbora j-te čiste strategije igrača II;

a_{ij}-dobit u igri igrača I u odnosu na igrača II za strategijski par (i,j).

Zadatak 3

U konfliktnoj situaciji učetvuju dve protivničke strane. Prvoj na raspolaganju stoje dve vrste oružja: A_1 i A_2, a drugoj strani dva tipa aviona B_1 i B_2. Cilj protivničke strane A je d odabere takvo oružje koje je efikasnije u odnosu na upotrebljeni avion. Međutim, protivnik nastoji da smanji verovatnoću pogađanja izborom pogodnijeg aviona. Verovatnoće za sve kombinacije strategija protivničkih strana date su u narednoj tabeli, koja predstavlja matricu cene igre, tako da je konfliktna situacija definisana kao antagonistička igra.

	B_1	B_2
A_1	0.4	0.2
A_2	0.2	0.6

a) naći gornju i donju vrednost matrične igre;
b) odrediti optimalne strategije i vrednost igre.

Rešenje.
a) Donja vrednost igre definisana je izrazom

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Gde su a_{ij} elemeti matrične cene, koji su dati u tabeli.

Prema tome imamo da je

$$\alpha_1 = \min_j \ (0.4,\ 0.2) = 0.2$$

$$\alpha_2 = \min_j \ (0.2,\ 0.6) = 0.2$$

Otuda je

$$\alpha = \max_i (\ \alpha_1,\ \alpha_2)\ \max_i (0{,}2,\ 0.2) = 0.2$$

$$\alpha = \ 0.2.$$

Gornja vrednost igre defiisana je izrazom

$$\beta = \min_j \ \max_i a_{ij}$$

Prema tome, za date brojne vrednosti imamo da je:

$$\beta_1 = \max_i (0.4,\ 0.2)$$

$$\beta_2 = \max_i (0.2,\ 0.6)$$

I

$$\beta = \min_j (\ \beta_1,\ \beta_2) = \min_j \ (0.4,\ 0.6)$$

$$\beta = 0.4.$$

Kako je $\alpha \neq \beta$ matrična igra nema sedlo i optimalne strategije igrača nalaze se u domenu mešoviih strategija.

b) Vektor mešovite strategije protivničke strane A je

$$P=(p_1, p_1), \quad \text{gde je } p_1+p_2= 1,$$

što znači da će protivnička strana A odabrati strategiju A_1 sa verovatnoćom p_1, a strategijski izbor A_2 sa verovatnoćom p_2.

Vektor mešovite strategije protivničke strane B je

$$Q=(q_1, q_2), \quad \text{gde je } q_1+q_2 = 1$$

Vrednost matrične igre je definisana sledećim izrazom

$$C(P,Q) = \sum \sum p_i a_{ij} q_j$$

Za dati brojni primer imamo da je

$$C(P,Q) = 0.4p_1q_1 +0.2\, p_1q_2+0.2\, p_2q_1+0.6p_2q_2,$$

ili možemo pisati da je

$$C(P,Q) = p_1\,(0.4q_1 +0.2\, q_2)+ p_2\,(0.2\, q_1+0.6q_2).$$

Ako je rešenje igre za igrača B u domenu mešovitih strategija, tj., ako su verovatnoće q_1 i q_2 veće od nule i ispunjavaju uslov mešovitih strategija igrača B, da je $q_1+q_1=1$ tada važe sledeće jednakosti:

$$C(P,Q) = 0.4q_1 +0.2\, q_2,$$
$$C(P,Q) = (0.2\, q_1+0.6q_2.$$

Ovome se dodaje da je $q_1+q_2=1$, pri čemu se dobijaju tri jednačine sa tri nepoznate, čije je rešenje

$$q_1=2/3\ ;\ \ q_2=1/3 \ \text{ i } \ C(P,Q) = 1/3.$$

Ako izraz za C(P,Q) uradimo po verovatnoćama q_1 i q_1 , dobija se

$$C(P,Q) = q_1 (0.4p_1 +0.2\ p_2)+ q_2\ (0.2\ p_1+0.6p_2).$$

Ako je rešenje igre za igrača A u domenu mešovitih strategija , tj. ako su verovatnoće p_1 i p_1 veće od nule i ispunjavaju uslov za mešovite strategije igrača A, da je $p_1+p_2=1$, tada vazi:

$$C(P,Q) = 0.4p_1 +0.2\ p_2,$$

$$C(P,Q) = 0.2\ p_1+0.6p_2)$$

i kako je $p_1+p_2=1$, dobijaju se sledeća rešenja za p_1, p_2, i C(P,Q)

$$p_1=2/3\ ;\ \ p_2=1/3 \text{ i } C(P,Q)=1/3.$$

Dakle, optimalne strategije su

$$P=(2/3,\ 1/3)\ ,\ Q=(2/3,\ 1/3),$$

A vrednost igre je

$$C(P,Q) = \ 1/3\ .$$

Zadatak 4

Ako je matrična igra definisana matricom 2x2, pokazati da se komponente vektora mešovitih strategija mogu sračunati na osnovu sledećih opštih izraza za komponente vektora I vrednost matrične igre.

	B_1 q_1	B_2 q_2
A_1 p_1	a_{11}	a_{12}
A_2 p_2	a_{21}	a_{22}

$$p1= (a_{22} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21}));$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

$$C(P, Q) = a_{11} p_1 + a_{21} p_2$$

$$q_1 = (C(P, Q) - a_{12}) / (a_{11} - a_{12});$$

$$q_2 = 1 - q_1 .$$

Matrične igre nx2

Zadatak 5

Konačna antagonistička igra definisana je matricom cene

	B_1	B_1
A_1	10	- 4
A_2	5	7
A_3	-5	13

gde elementi matrice cene definišu dobit učesnika A u igri, u odnosu na učesnika B. Odrediti optimalne strategije igrača i vrednost matrične igre.

Rešenje.

Rešenje igre nalazi se u domenu mešovitih strategija, vrednost igre u granicama

$$\alpha \leq 5 \leq v \leq \beta = 10.$$

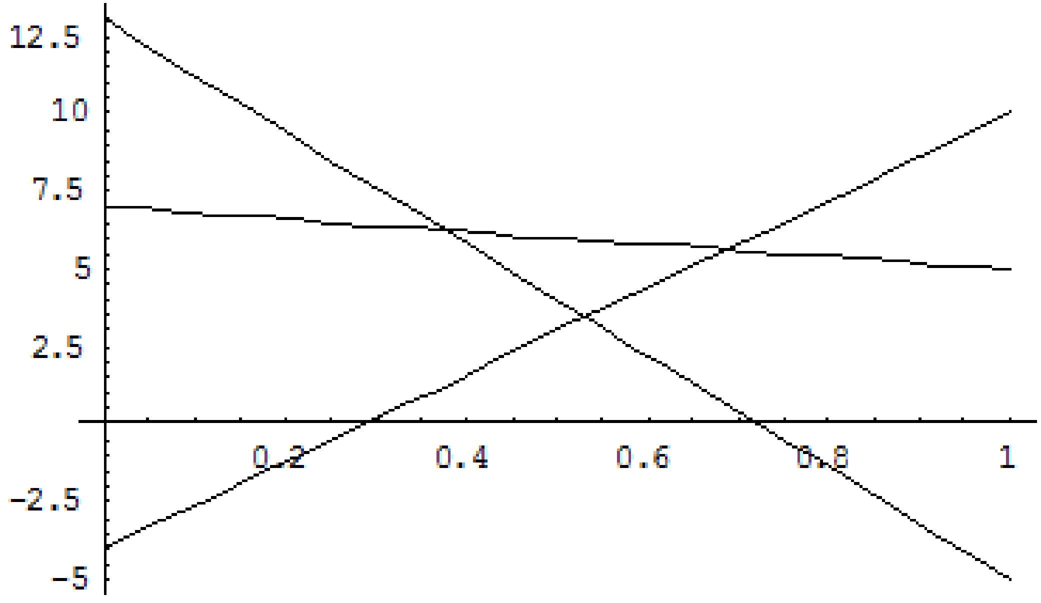
U ovakvm slučajevima neophodno je je prvo odrediti vektor optimalne strategije za igrača B . U tom cilju definišu se očekivani gubici za igrača B za svaki mogući izbor čiste strategije igrač A. Tako imamo da je

$$C(A_1, Q) = 10\,q_1 - 4\,q_2$$
$$C(A_2, Q) = 5\,q_1 + 7\,q_2$$
$$C(A_3, Q) = -5\,q_1 + 13\,q_2$$

Imajući u vidu da je $q1 + q2 = 1$, ovaj sistem jednačina se svodi na sledeće

$$C(A_1, Q) = 14\,q_1 - 4$$
$$C(A_2, Q) = 7\ - 2\,q_1$$
$$C(A_3, Q) = 13 - 18\,q_1 .$$

Grafički prikaz ovo sistema jednačina je dat na slici



Igrač B nastojaće da oda bere verovatnoću q_1, tako da minimizira maksimalne moguće gubitke, tj. da ne dozvoli da njegovi gubici budu veći od vrednosti igre. Otuda igrač B ispituje funkciju $f(q_1)$, koja je definisana izrazom

$$f(q_1) = \max \{14\, q_1 - 4 \,;\, 7 - 2\, q_1 ; 13 - 18\, q_1 \}$$

Prema tome, optimalna vrednost q_1^* određuje se na osnovu izraza

$$f(q_1^*) = \min \{ f(q_1) \}$$

Iz grafičkog prikaza se vidi da su q_1^* i $f(q_2^*)$ koordinate tačke preseka pravih

$$C(A_1, Q) = 14\, q_1 - 4$$

$$C(A_2, Q) = 7 - 2\, q_1.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se da je

$$q_1^* = 11/16 \text{ i } q_2^* = 5/16$$

$$f(q_1^*) = 45/8 = v$$

polazeći od ovoga mogu se sračunai očekivani gubici

$$C(A_1, Q) = 45/8$$

$$C(A_2, Q) = 45/8$$

$$C(A_3, Q) = 5/8$$

Imajući u vidu opšti izraz za vrednost matrične igre može se pisati da je

$$v = C (P, Q) = \Sigma_i\, C(A_i, Q)\;\; p_i$$

$$C (P, Q) = 45/8\, p_1 + 45/8\, p_2 + 5/8\, p_3$$

A kako je $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, to se može pisati da je

$$C (P, Q) = 45/8\, p_1 + 45/8 (1 - p_1 - p_2) + 5/8\, p_3 = 45/8 - 40/8\, p_3$$

Igrač A će nastojati da odabere vektor mešovite strategije tako da njegov dobitak u igri ne bude manji od vrednosti igre, tj. sledi da je $p_3 = 0$. za igrača i igra se svodi na matricu cene

	B_1	B_1
A_1	10	- 4
A_2	5	7

Čije je rešenje je $p_1 = 1/8$ a $p_2 = 7/8$. Prema tome , možemo pisati da je rešenje matrične igre

$$P^* = (1/8 , 7/8, 0)$$
$$Q^* = (11/16, 5/16 , 0)$$
$$C (P^*, Q^*) = 45/8$$

Matrične igre oblika 2xm

U matričnoj igri stoje na raspolaganju strategije P_1 i P_2, a igraču II Q_1, Q_2 i Q_3. Element a_{ij} u marici cene predstavlja dobit za igrača I ako odabere *i*-tu strategiju a njegov protivnik odabere *j*-tu strategiju. Za igrača II ovaj isti elenenat predstavlja gubitak u igri za odgovarajući par strategija. Matrica cene igre data je tabelom:

	Q_1	Q_2	Q_3
P_1	6	5	10
P_2	10	20	3

Potrebno je :

a) odrediti optimalne mešovite strategije oba igrača i vrednost igre;

b) kakve će biti optimalne mešovite strategije igrača ako je elemenat a_{13} u matrici cene promeni vrednost, tako da je nova vrednost ovog elementa jednaka 5?

Rešenje.

Matrična igra nema sedlo i rešenje igre se nalazi u domenu mešovitih strategija. Matrična igra ima oblik (2xm), što znači da ćemo prvo tražiti vektor mešovite strategije za igrača I, tj. traži se

$$P = (p_1, p_2)$$

Gde je

$$p_1 + p_2 = 1 \text{ i } p_i = 0 \text{ za } i = 1,2.$$

Pre svega biće potrebno napisati izraze za očekivana plaćanja kada igrač I koristi mešovitu strategiju, a igrač II neki od strategijskih izbora: Q_1, Q_2 ili Q_3. U ovim slučaju dobija se da je

$$C(P,Q_1) = 6\,p_1 + 10\,p_2$$
$$C(P,Q_2) = 5\,p_1 + 20\,p_2$$
$$C(P,Q_3) = 10\,p_1 + 3\,p_2$$

Pri čemu je $p_1 + p_2 = 1$. Sada kada se u ovim jednačinama smeni vrednost za $p_2 = 1 - p_1$ Dobija se novi sistem jednačina

$$C(P,Q_1) = 10 - 4\,p_1$$
$$C(P,Q_2) = 20 - 15\,p_1$$
$$C(P,Q_3) = 3 + 7\,p_1$$

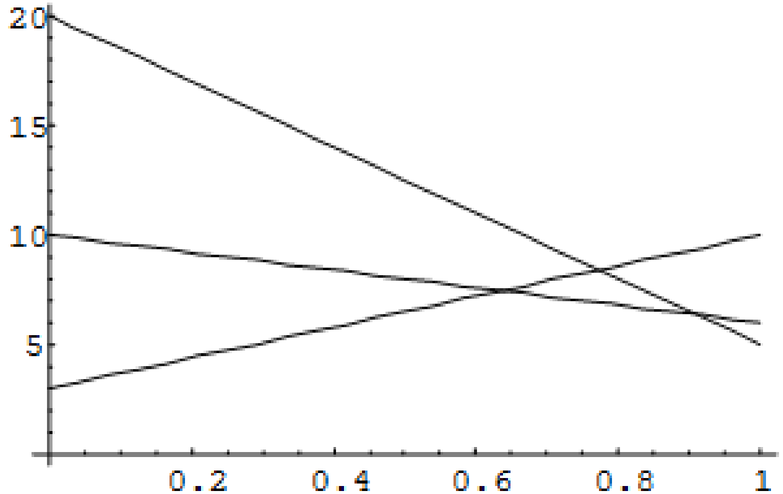
Za igrača I određivanje optimalne mešovite strategije znači da on treba da odredi takvu vrednost , koja će omogućiti što je moguće veću minimalnu dobit. Ako to analitički izrazimo, znači da će igrač I ispitivati funkciju definisanu izrazom

$$f(p_1) = \min \{10 - 4\,p_1 \ ; 20 - 15\,p_1; 3 + 7\,p_1\}$$

u intervalu $0 \leq p_1 \leq 1$, pri čemu se traži takvo p_1^* za koje važi

$$f(p_1^*) = \max f(p_1)$$

Da bi odredili funkciju $f(p_1)$ moramo graički prikazati očekivana plaćanja igrača II u funkciji verovatnoće p_1 koja su definisana prethodnim sistemom jednačina.



Izlomljena linija ABCD predstavlja funkciju $f(p_1)$ sa maksimumom u tački B. Prema tome, tačka B odgovara optimalnoj mešovitoj strategiji igrača I, obezbeđujući mu najveću minimalnu dobit, a p_1^* sračunavamo tražeći presek pravih C(P,Q₃) i C(P,Q₁), tj. imamo da je

$$10 - 4\,p_1^* = 3 + 7\,p_1^*,$$

Odakle proizilazi da je

$$p_1^* = 7/11\ , \quad p_2^* = 1 - 7/11 = 4/11$$

$$C(P,Q_1) = 82/11.$$

Igrač II mora nastojati da odabere svoju mešovitu strategiju tako da ne dozvoli igraču I da ostvari veću dobit nego što je dobit

$$C(P^*,Q_1) = 82/11.$$

Naime, na osnovu jednačina $C(P,Q_1)$, $C(P,Q_2)$ i $C(P,Q_3)$sračunavaju se prosečna plaćanja, pri čemu se dobija

$$C(P^*,Q_1) = 82/11$$
$$C(P^*,Q_2) = 115/11$$
$$C(P^*,Q_3) = 82/11$$

. polazeći od opšteg izraza za vrednost matrične igre možemo pisati da je

$$C(P^*,Q) = \Sigma_i C(P^*,Q_i) q_i$$

Te prema tome , imamo da je

$$C(P^*,Q) = 82/11\ q_1 + 115/11 q_2 + 82/11\ q_3\ ,$$
$$C(P^*,Q_1) = 82/11\ q_1 + 115/11 q_2 + 82/11\ (1 - q_1 - q_2)\ ,$$
$$C(P^*,Q_1) = 82/11 + 33/11 q_2$$

Iz poslednje jednačine očigledno je da igrač II treba da odabere strategiju =0. Prema tome , optimalna mešovita strategija igrača II je

$$Q^* = (q_1^*\ , 0\ , q_3^*)$$

Što je ekvivalentno matričnoj igri 2x2 sa matricom cene

	Q_1	Q_2
P_1	6	10
P_2	10	3

Rešavajući ovu matričnu igru dobijamo rešenje za q_1^* i q_3^*,

$$q_1^* = 7/11,$$

$$q_3^* = 4/11.$$

Vektor optimalne mešovite strategije za igrača II je

$$Q^* = (7/11;\ 0;\ 4/11)$$

A vrednost matrične igre je

$$C(P^*, Q^*) = 82/11.$$

Ako je vrednost elementa $a_{ij} = 5$ problem se svodi na rešavanje nove matrične igre. Međutim ako na grafiku ucrtamo novo očekivano plaćanje

$$C(P, Q_3) = 5\,p_1 + 3\,p_2 = 2\,p_1 + 3$$

S obzirom da je $p_1 + p_2 = 1$, te možemo zaključiti da se u ovom slučaju funkcija $f(p_1)$ svodi na duž AD a p_1^* je jednako jedinici, što znači da se rešenje igre nalazi u domenu čistih strategija, tj. matrična igra ima sedlo I rešenje je

$$P = (1;\ 0),\ Q = (0\ ;\ 0;\ 1)\ \mathrm{I}\ C(P, Q) = 5.$$

Rešavanje matričnih igara nxm primenom linearnog programiranja

Svaku konačnu antagonističku igru dva lica sa nultom sumom možemo rešiti primenom linearnog programiranja. Kanonični oblik ove igre je matrica plaćanja igrača II u odnosu na igrača I,

$$A = \| a_{ij} \| , \ (i = 1, 2, .. ,m; j = 1, 2, .. ,n)$$

Gde se indeks *i* odnosi na strategijske mogućnosti igrača I, a indeks *j* na strategijske mogućnosti igrača II.

Ako pretpostavimo da su primenljive svaka od n strategijskih mogućnosti igrača I, odredimo verovatnoće njihovog korišćenja u sklopu optimalne mešovite strategije (ako je neka od strategijskih mogućnosti nekorisna to će odgovarajuća verovatnoća biti jednaka nuli). Označimo ove verovatnoće sa $p_1, p_2, .., p_m$, a vrednost igre sa V. Pošto za optimalnu strategiju očekivana dobit igrača I ne može biti manja od vrednosti igre V za bilo koji strategijski izbor protivnika, ovo matematički možemo izraziti sa n nejednačina

$$a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{m1} p_m \geq V$$
$$a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + ... + a_{m2} p_m \geq V$$

$$..$$

$$a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + ... + a_{mn} p_m \geq V$$

sada uvodimo nove promenljive,

$$x_1 = p_1 / V , \quad x_2 = p_2 / V \ , ..., \ x_m = p_m / V$$

Da bi izbegli mogućnost deljenja nulom , možemo se uvek obezbediti da bude $V > 0$. Dovoljno je matricu A transformisati tako da svi elementi novodobijene matrice budu veći od nule. Može se pokazati da će ova transformacija povećati vrednost igre za veličinu d koja se dodaje elementima matrice A da bi postali veći od nule.

Kako je

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1,$$

to će zbir novouvedeni promenljivih biti

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/V,$$

ako se leva i desna strana nejednačine podeli sa V dobija se novi sistem nejednačina

$$\begin{array}{c} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{m1} x_m \geq 1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{m2} x_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{mn} x_m \geq 1 \end{array} \qquad (1)$$

za uvedene uslove sve promenljive x_i su veće od nule.

Kako je cilj optimalne strategije igrača I maksimizacija dobiti, to će za ostvarivanje ovog cilja biti potrebno da se linearna funkcija

$$f(X) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/V \qquad (2)$$

minimizira. Prema tome, optimalna strategija prvog igrača , tj. skup verovatnoća $p_i = x_i V$ (i = 1, 2, ...m), određuje se iznalaženjem minimuma funkcija *f(X)*
Za x_i veća od nule a da pri tome bude zadovoljen sistem ograničenja (1)

Vektor optimalne mešovite strategije igrača II, tj. skup verovatnoća q_j (j = 1, 2, .. ,n) može se pdrediti na sličan način. Pošto za optimalnu strategiju očekivani gubitak drugog igrača ne može biti veći od V pri bilo kojoj strategiji protivnika, to se može pisati sledeći sistem nejednačina,

$$\Sigma_i a_{ij} q_j \leq V, \; (i = 1, 2, .. ,m). \qquad (3)$$

Na sličan način , kao u prethodnom slučaju , i ovde se uvode nove promenljive

$$y_j = q_j / V, \quad (j = 1, 2, .. ,n)$$

čiji je zbir

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1/V,$$

jer je

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_m = 1,$$

uslov nenegativnosti promenljivih y_j , kao i promenljivig x_i u prethodnom modelu , može se ostvariti transformacijom početne matrice cene igre. Naime , dodavanjem dovoljno velikog pozitivnog broja *d* tako da A´ = A + *d* , postiže se da će vrednost V'= V + *d* biti uvek veća od nule, a samim tim postiže se i uslov nenegativnosti promenljivih x_i i y_j.

Kako optimalna strategija igrača II ima za cilj minimizaciju gubitaka, to će ovaj čilj biti postignut maksimizacijom funkcije

$$\Phi(Y) = y_1 + y_2 + .. + y_n = 1/V.$$

Optimalna strategija igrača II, tj. skup verovatnoća $q_j = y_j V$, može se odrediti iznalaženjem maksimuma funkcije $\Phi(Y)$ za y_j veće od nule, a da pri tome budu zadovoljena ograničenja koja su definisana sistemom nejednačina (3).

Iz prethodnog razmatranja proizilazi da je

$$(\min)\ f(X) = (\max)\ \Phi(Y) = 1 / V.$$

Prema tome, na problem iznalaženja rešenja matrične ige primenom linearnog programiranja treba gledati kao na rešavanje jedinstvenog zadatka LP, gde se na osnovu rešenja primarnog zadatka određuje optimalna strategija jednog igrača, a na osnovu rešenja dualnog zadatka određuje optimalna strategija dualnog učesnika u igri. Pri iznalaženju optimalnih strategija igrača treba koristiti činjenicu da rešenje primarnog zadatka sadrži i rešenje dualnog zadatka linearnog programiranja.

Zadatak 7

Naći rešenje matrične igre, koja je definisana matricom cene

	B_1	B_2
A_1	0.2	0.8
A_2	0.7	0.3

Gde su B_1 i B_2 strategijske mogućnosti igrača II, a A_1 i A_2 strategijske mogućnosti igrača I. Problem rešiti primenom linearnog programiranja

Rešenje.

Matematički model zadatka linearnog programiranja preko koga izračunavamo vektor mešovite strategije

$$P = (p_1 ,\ p_2), \text{ gde je } p_1 + p_2 = 1,\ p_i \geq 0,$$

Ima sledeći oblik

$$(min)\ f(X) = x_1 + x_2 = 1/V$$
$$0.2x_1 + 0.7x_2 \geq 1$$
$$0.8x_1 + 0.3x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

matematički model zadatka linearnog programiranja preko koga izračunavamo vektor mešovite strategije

$Q = (q_1 , q_2)$, gde je $q_1 + q_2 = 1$, $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$,

ima sledeći oblik

$$(max)\ \Phi(Y) = y_1 + y_2 = 1/V$$
$$0.2y_1 + 0.8y_2 \leq 1$$
$$0.7y_1 + 0.3x_2 \leq 1$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$$

problem se nadalje može rešavati grafičkom metodom.

Zadatak 8

Dva dečaka se igraju tako što nezavisno jedan od drugog pokazuju jedan, dva ili tri prsta. Dobit ili gubitak u igri određuje ukupn broj ispruženih prstiju. Ako je ispruženi broj prstiju paran, onda taj broj označava dobit prvog dečaka (u dinarima), a ako je broj ispruženih prstiju neparan , onda taj broj označava dobit u dinarima drugog dečaka.

a) formirati matricu plaćanja;
b) naći rešenje matrične igre;
c) utvrditi da li je igra ravnopravna za oba igrača

Rešenje.

Iz definicije zadatka, proizilazi da matrica plaćanja ima sledeći oblik:

	I_1	I_2	I_3	Minimum reda
II_1	2	-3	4	-3
II_2	-3	4	-5	-5
II_3	4	-5	6	-5
Maksimum kolone	4	4	6	

Donja vrednost igre je $\alpha = -3$, a gornja vrdnost igre je $\beta = 4$. Kako matrična igra nema sedlo , jer su donja i gornja vrednost igre različite, to ne postoje stabilne minimaksne straegije . Rešenje igre treba tražiti u domenu mešovitih strategija.
Obzirom da oba učesnika u igri immaju isti broj strategijskih mogućnosti –tri, rešenje matrične igre naći ćemo rešavajući sistem jednačina-sistem od četiri jednačine sa četiri nepoznate.
Polazeći od očekivane dobiti prvog igrača u zavisnosti od strategijskog izbora drugog irača možemo formiratisledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2p_1 - 3p_2 + 4p_3 &= V \\ -3p_1 + 4p_2 - 5p_3 &= V \\ 4p_1 - 5p_2 + 6p_3 &= V \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1. \end{aligned}$$

U ovom sistemu jednačina p_1 , p_2 , p_3 predstavljaju relativne učestalosti sa kojima će prvi učesnik u igri upotrebljavati svoje čiste strategije (I_1, I_2, I_3) , a V predstavlja vrednost igre.
Gornji sistem jednačina rešavamo tako što iz četvrte jednačine izračunavamo p_3 i dobijeni izraz za p_3 smenjujemo u prethodne tri jednačine. Posle sređivanja dobija se novi sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2p_1 + 7p_2 + V &= 4 \\ 2p_1 + 9p_2 - V &= 5 \\ 2p_1 + 11p_2 + V &= 6 \end{aligned}$$

Na osnovu ovih izračunaih vrednosti determonanti određujemo vrednosti promenljivih:

$$p_1 = D_1 / D = ¼ \quad ; \quad p_2 = D_2 / D = ½ \quad ; \quad p_3 = 1 - p_1 - p_2 = ¼ \quad \text{i} \quad V = D_3/D = 0$$

Ako relativne učestalosti primene strategija drugog učesnika obeležimo sa q_1, q_2 i q_3, možemo postaviti sledeći sistem jednačina

$$2q_1 - 3q_2 + 4q_3 = V$$
$$-3q_1 + 4q_2 - 5q_3 = V$$
$$4q_1 - 5q_2 + 6q_3 = V$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

Kako je već određena vrednost igre V = 0 , to nisu potrebne sve četiri jednačine već samo tri. Prema tome imamo da je

$$2q_1 - 3q_2 + 4q_3 = V$$
$$-3q_1 + 4q_2 - 5q_3 = V$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

rešenjem ovog sistema jednačina dobijamo da je

$$q_1 = ¼ \quad ; q_2 = ½ \quad q_3 = ¼$$

prema tome , optimalne mešovite strategije učesnika u igri su:

I : (¼ , ½ , ¼) i II: (¼ , ½ , ¼) a vrednost igre je V= 0.

Zaključak je da oba dečaka u 50% slučajeva treba da pruže dva prsta, a u 25% slučajeva 1 i 3 prsta. Igra je ravnopravna i očekivana dobit u igri je jednaka nuli.